Chapitre 15

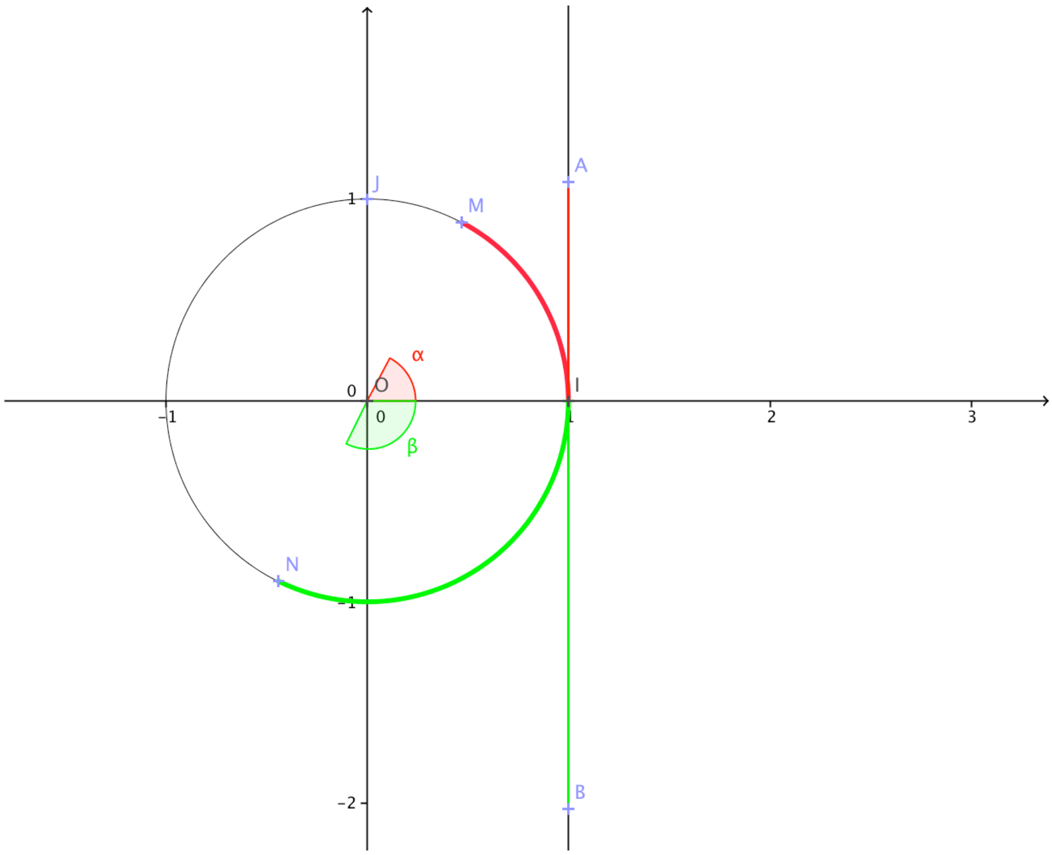
Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique et droite des réels

(Voir animation : www.youtube.com/watch?v=RdGZdUV5F9Y)

1. Cercle trigonométrique : Soit C un cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct (appelé aussi sens positif ou sens trigonométrique) qui, par convention, est le sens inverse des aiguilles d'une montre (ou encore le sens giratoire).
Un tel cercle est appelé cercle trigonométrique.
Le périmètre d'un cercle étant égal à $2\pi r$, le cercle trigonométrique a un périmètre de longueur 2π.

2. "Enroulement" de la droite des réels :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$ on considère le cercle trigonométrique de centre O et « la droite des réels » représentée par la droite tangente au cercle en I. En "enroulant" la droite sur le cercle dans le sens direct pour les réels positifs et dans le sens indirect pour les réels négatifs, on peut "observer" que :



✔ A tout réel x on associe un unique point M du cercle.

✔ A tout point M du cercle est associé une infinité de réels.
Si x est l'un d'eux, tous les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec k un entier relatif.

✔ Pour un point M donné, il existe un unique réel dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Remarque : Pour un réel x de l'intervalle $[0, 2\pi[$, la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ correspondant est par définition la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$. Comme il y a proportionnalité entre angles et mesures d'arcs, on peut passer d'une mesure en degré à une mesure en radian en multipliant par le coefficient de proportionnalité $\pi/180°$.

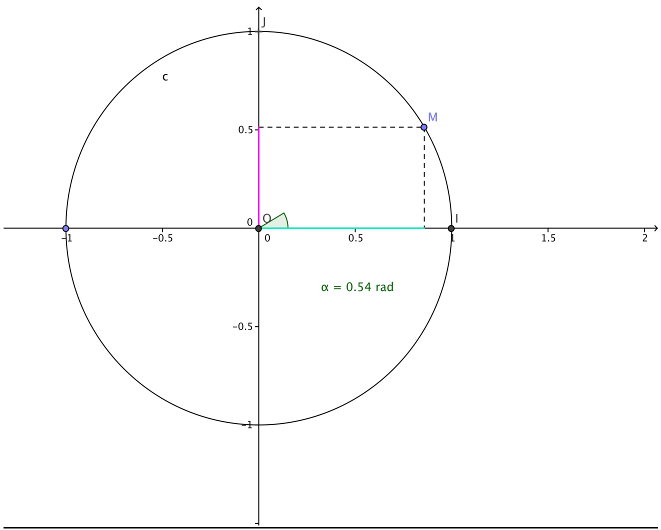
II. Cosinus et sinus

1. <u>Cosinus et sinus d'un nombre réel.</u>

a) <u>Définition</u> : Soit x un réel quelconque. Dans le repère orthonormé $(O;I,J)$,

✔ le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M associé au réel x sur le cercle trigonométrique.

✔ le sinus de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans ce repère.



b) <u>Propriétés</u> : Soit x un réel quelconque,

i) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

ii) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

c) <u>Démonstrations</u> :

i) Comme le cercle trigonométrique est de rayon 1, le théorème de Pythagore nous donne le résultat.

ii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et comme un carré est toujours positif, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ et $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ d'où le résultat.

2. <u>Valeurs remarquables et trigonométrie du collège</u>

Les angles aigus, exprimés en degrés, ont été étudiés au collège.

a) <u>Tableau des valeurs remarquables</u>

$\hat{a}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \hat{a}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos \hat{a}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\tan \hat{a}$	0	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$	$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$	

b) Démonstrations :

Pour 30° et 60° : Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1 et H le pied de la perpendiculaire à [BC] passant par A. La hauteur d'un triangle équilatéral est aussi médiane et bissectrice. Donc, par définition, ABH est un triangle rectangle en H, BAH = 60° : 2 = 30° et H est le milieu de [BC] (soit BH = ½).
Le théorème de Pythagore, dans le triangle ABH donne : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4$.

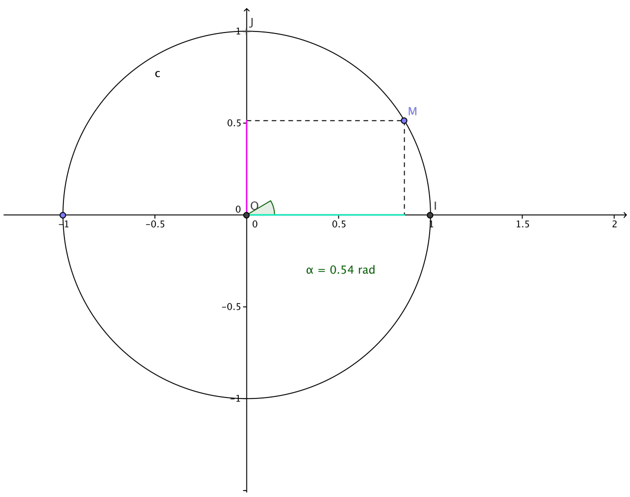
Soit AH = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Toujours dans ABH, les formules de trigonométries donnent :

$$\cos 30° = \sin 60° = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin 30° = \cos 60° = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Pour 45° : Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que A = 1.
Le théorème de Pythagore donne : $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Donc BC = $\sqrt{2}$.

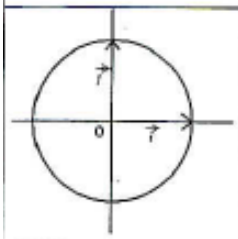
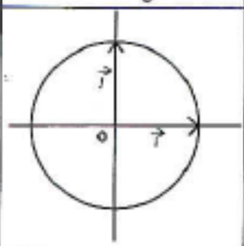
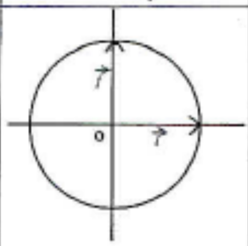
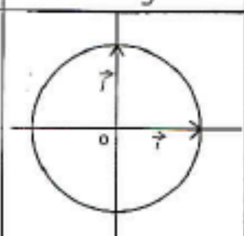
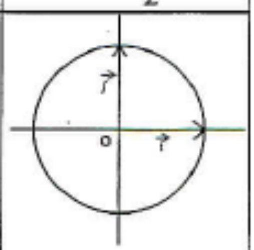
Les formules de trigonométrie donnent : $\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. Lien avec la trigonométrie du collège
Soit x un réel auquel est associé un unique point M du premier quart du cercle trigonométrique.
Le point M est repéré par l'angle IOM que l'on peut exprimer en degré. Dans le repère (O ; I, J), l'abscisse de M (donc le cosinus de x) est égal au cosinus de l'angle IOM (exprimé en degré) et l'ordonnée de M (donc le sinus de x) est égal au sinus de l'angle IOM (exprimé en degré).



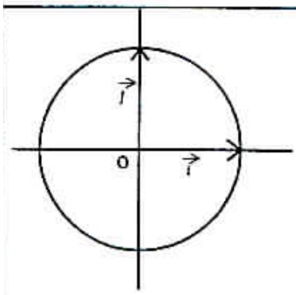
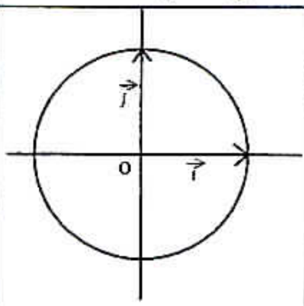
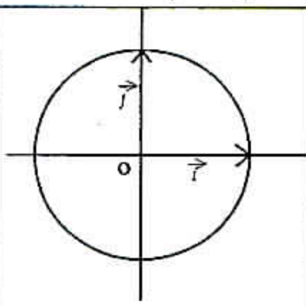
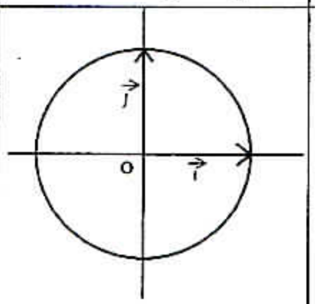
Remarques :
a) Pour obtenir les valeurs du sinus ou du cosinus d'un réel x, il faut se mettre sur la calculatrice en mode radian.
b) Certaines autres valeurs se déduisent des valeurs précédentes en utilisant des symétries axiales et centrales.

Sur chaque figure, placer le point M représentant le nombre réel x indiqué, puis donner la valeur numérique exacte de son abscisse (cos x) et de son ordonnée (sin x) :

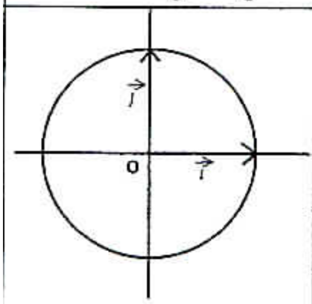
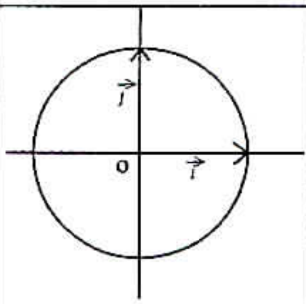
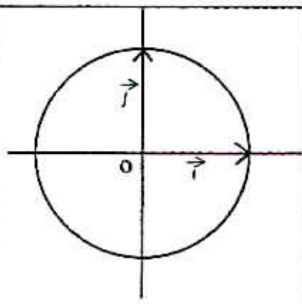
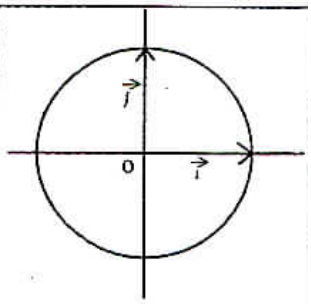
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2}$
				
cos x = sin x =	cos x = sin x =	cos x = sin x =	cos x = sin x =	cos x = sin x =

Faire de même en choisissant une bonne symétrie et en utilisant les résultats précédents :

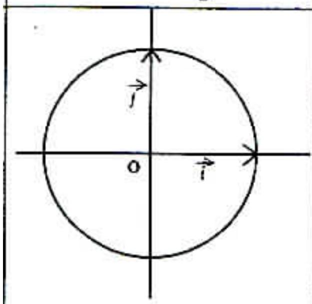
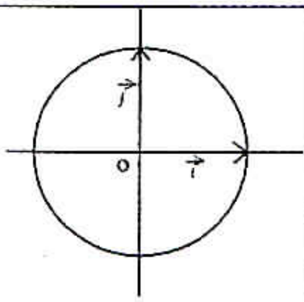
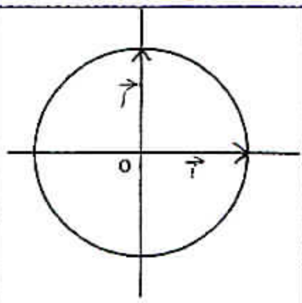
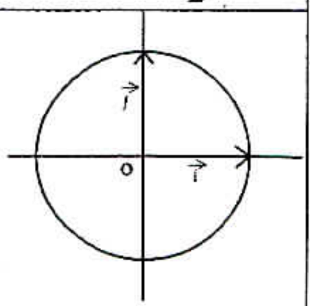
1) La symétrie utilisée ici est ……

$x = \pi - 0 = \pi$	$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$	$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$

2) La symétrie utilisée ici est ……

$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$	$x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$	$x = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$

3) La symétrie utilisée ici est ……

$x = -\frac{\pi}{6}$	$x = -\frac{\pi}{4}$	$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = -\frac{\pi}{2}$
 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$	 $\cos x =$ $\sin x =$